

Fehlerkorrekturverfahren mit Walsh-Funktionen

Dieter Zimmermann DL2RR

Bereits bei der Betriebsart MT63 [1] setzte Pavel Jalocha SP9VRC Walshfunktionen für die Fehlerkorrektur ein. Auch in seinem neuesten Programm 'Olivia' griff er auf diese bewährten Methode zur Korrektur von Übertragungsfehlern zurück [2].

Zusätzliche Bitverzahnung (engl. Bit interleaving) (darüber wurde bereits ausführlich berichtet [3]) erhöht die Fehlerbeseitigung und eine **Bitverwürfelung (engl. scrambling)** verändert das Spektrum des Nutzsignals so, dass einerseits die Bandbreite um ein Vielfaches ansteigt aber im Gegenzug auch die Signalamplitude um genau dieses Vielfache reduziert wird. Je größer die Bandbreite gespreizt wird, umso größer wird auch die Amplitude gedämpft! Das kann bei großen Bandspreizungen so weit gehen, dass die Amplitude unterhalb des Stör- bzw. Rauschpegels fällt. Da die Bandspreizung erfolgt durch Multiplikation mit dem Kodewort 0xE257E6D0291574EC. Da es statistisch unabhängig zu anderen Signalen bzw. dem Rauschen im selben Frequenzbereich ist, kann das gespreizte Nutzsignal wieder aus den überlagerten Störsignalen heraus gefiltert werden

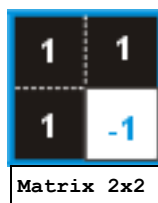
Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Betriebsarten besteht bei der Übertragung (Aussendung) der Daten. Bei MT63 werden diese über die gesamte Bandbreite von 1000Hz¹ auf 63 Kanäle verteilt und per DBPSK-Modulation ausgesendet, während sie bei Olivia in einem von 32 Kanälen¹ innerhalb der gleichen Bandbreite konzentriert sind und per MFSK-Modulation gesendet werden.

Die Walshfunktion

Walshfunktionen [4] sind nichtharmonische Funktionen mit den Zuständen +1 und -1, der Ausgangszustand ist immer +1. Um Eingangssignale zu beschreiben, werden endlich viele Walshfunktionen über das zu approximierende Signal gelegt.

Eine Walsh-Matrix [4] [5] ist eine quadratische Matrize mit den Abmessungen 2ⁿ. Man kann sie aus einer Hadamard-Matrix [6] mit gleicher Abmessung erhalten, deren Reihen gegenseitig orthogonal sind. Die Reihen sind so anzuordnen, dass die Anzahl von Zustands-

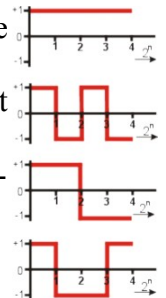
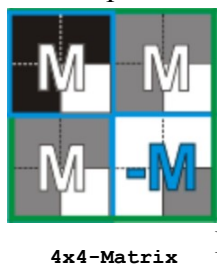
änderungen zunimmt. Jede Reihe einer Walsh-Matrix entspricht einer Walsh-Funktion. Die kleinste Matrix erhalten wir bei einer Länge von n=1 (2ⁿ=2), bestehend aus 2 Reihen



Walshfunktionen haben folgende Eigenschaften :

- sie sind orthogonal,
- sie sind reziprok zu sich selbst,
- die Summe der Produkte der einzelnen Koeffizienten zweier Funktionen ergeben immer Null,
- bei jeder Funktion ist die Anzahl der positiven Werte gleich der negativen, ausgenommen bei der ersten.
- die Variablen können vertauscht werden
- das Produkt zweier Walshfunktionen ergibt eine neue Walshfunktion,
- die erlaubten Zuständen der Koeffizienten sind ausschliesslich +1 oder -1,
- der Anfangszustand ist immer +1.

Ersetzt man in einer Matrix die 1er-Felder durch diese Minimalmatrix 'M' und die -1er-Felder durch die inverse Minimalmatrix '-M', bekommt man eine Walsh-Matrix mit der doppelten Anzahl von Reihen und Spalten. Auf diese Weise lässt sich sehr einfach eine Walsh-Matrix beliebiger Grösse erzeugen. Eine so erzeugten Matrix nennt man 'natürliche' bzw. 'Hadamard-Matrix' [6]. Das 'Pulsdiagramm' zu dieser Matrix sieht dann entsprechend der Zeichnung rechts aus: Durch eine weitere Verdopplung erhalten wir die 8x8-Matrix für das folgende Beispiel und letztlich erhalten wir durch noch mehr Substitutionen die 64x64-Matrix, die in Olivia verwendet wird.



Die Walsh-Hadamard-Transformation

Bei der Walsh-Hadamard-Transformation [7] wird jedes Bit des zu übertragenden n-Bit lange Datenwortes mit der n-ten Walsh-Funktion einer Walsh-Matrix (hier die 'sequenzielle' Form) der Länge 2ⁿ multipliziert. Das Ergebnis sind n Schlüsselworte, die aus n Bits bestehe. Jedes Bit erstellt also ein eigenes Schlüsselwort, das ihm eindeutig zugewiesen ist und zum Empfänger gesendet wird. Für

Walsh-Hadamard-Transformation		Schlüsselworte	
LSB	0 -1 *	1 1 1 1 1 1 1 1	= -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
	1 1 *	1 1 1 1 -1 -1 -1 -1	= 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1
	0 -1 *	1 1 -1 -1 -1 -1 1 1	= -1 -1 1 1 1 1 -1 -1
	0 -1 *	1 1 -1 -1 1 1 -1 -1	= -1 -1 1 1 -1 -1 1 1
	1 1 *	1 -1 -1 1 1 -1 -1	= 1 -1 -1 1 1 -1 -1
	1 1 *	1 -1 -1 1 -1 1 -1	= 1 -1 -1 1 -1 1 -1
	0 -1 *	1 -1 1 -1 -1 1 -1	= -1 1 -1 1 1 -1 -1
	0 -1 *	1 -1 1 -1 1 -1 -1	= -1 1 -1 1 -1 -1 -1
MSB	0 -1 *	1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1	= -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1 -1
Datum		Walsh-Matrix	Quersumme
			0 0 0 0 0 0 0 0
			-2 -2 -2 6 -2 -2 -2 -2

¹ Standardwert im Vorgabemodus (default)

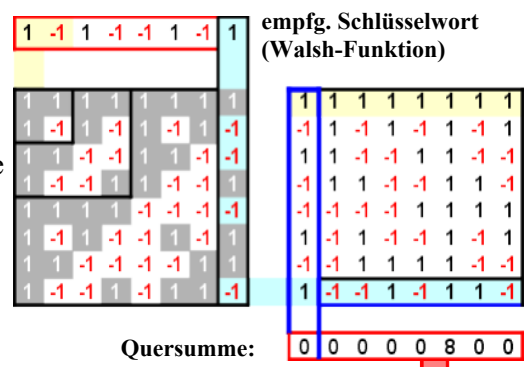
Datenstromes verknüpft und verschachtelt.

Der Empfänger

Im Demodulator wird wiederum eine Walsh-Hadamard-Transformation durchgeführt, d.h. es wird wieder jede Stelle der empfangenen Walsh-Funktion mit der Walsh-Matrix reihenweise multipliziert und dann stellenweise aufaddiert. Mit anderen Worten:

- die 1. Stelle des Schlüsselwortes wird mit alle Stellen der ersten Zeile (oder Spalte) der Walsh-Matrix multipliziert,
- die 2. Stelle des Schlüsselwortes wird mit alle Stellen der zweiten Zeile (oder Spalte) multipliziert,
- usw. bis zur 8. Stelle des Schlüsselwortes.
- Von jeder Spalte wird die Summe gebildet.

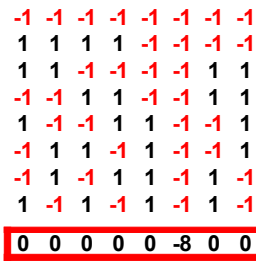
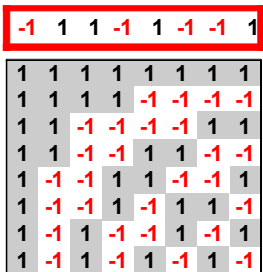
Walsh-Hadamard-Transformation



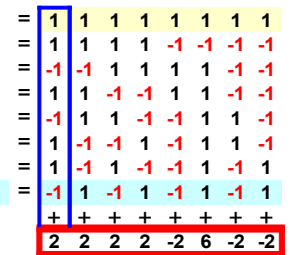
Es bleibt sich gleich, ob Zeilen oder Spalten genommen werden, da diese identisch sind!

Die senkrechte Quersumme jeder Stelle aller Zeilen liefert das Ergebnis. Der Kanal mit der grössten Leistung wird auf 'logisch Eins' gesetzt, alle anderen auf 'logisch Null'. Unter Berücksichtigung der Reihenfolge (MSB ist hier rechts!) erhalten wir das gesendete Datenwort 0010 0000 = 20H bzw. 32.

Empfang des erweiterten Zeichensatzes



Wenn wir einen negativen Puls erhalten dann wurde ein Zeichen gesendet, das grösser als 8 ist. Auf diese Weise kann die doppelte Zeichen-Menge bei gleicher Signallänge übertragen werden. In diesem Bild empfangen wir das Schlüsselwort aus dem früherem Beispiel und sehen, dass die Dekodierung eindeutig das richtige Ergebnis liefert. Wir haben ein Zeichen mit dem Code 1101 1111 empfangen, dem wir vereinbarungsbemäss den Wert 13 zuweisen.



Empfang gestörter Signale

Angenommen, auf dem Übertragungsweg sei das 2. Bit durch Rauschen, QRM, oder QSB 'umgedreht' worden. Diese Störung verteilt sich nach der Transformation gleichmässig auf alle Stellen des Endergebnisses, so dass der 6. Kanal immer noch eindeutig die grösste Leistung aufweist und damit auf logisch 1 bleibt

Übertragung von Datenströmen

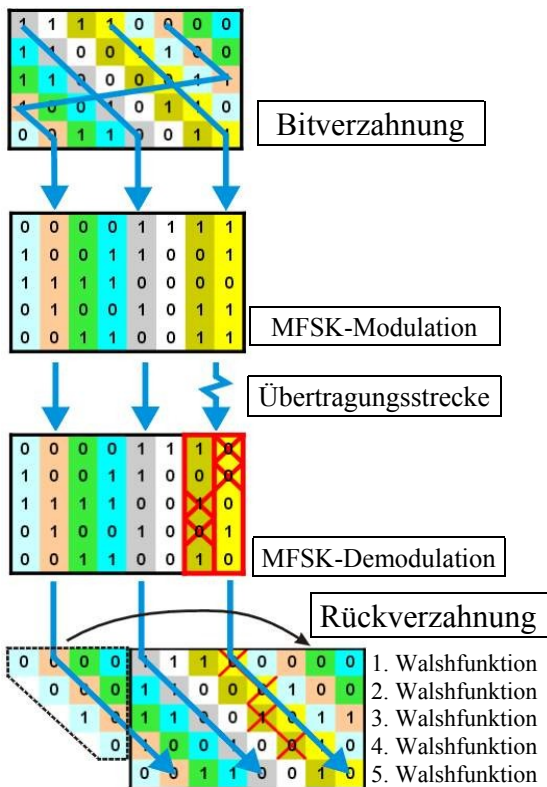
In der Praxis haben wir es jedoch nicht (nur) mit der Übertragung einzelner Zeichen zu tun, sondern um längere Textpassagen oder sonstige Daten, also mit Datenströmen.

Information	8	4	2	1	Bit	1	2	3	4	5	6	7	9
2	0	0	1	0	Walch 1 von „2.“	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
4	0	1	0	0	Walch 2 von „4.“	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
3	0	0	1	1	Walch 3 von „3.“	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
6	0	1	1	0	Walch 4 von „6.“	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
12	1	1	0	0	Walch 5 von „12.“	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1

Fehler durch anhaltende Rauscheinbrüche, Bündelstörungen oder Fading lassen sich ausreichend gut beseitigen, solange die Dauer der Störung unterhalb einer bestimmten Länge liegt. Die einzelnen Bits des Datenstromes werden durch Verwürfelung (scrambling) und einfache

Bitverzahnung (nterleaving) zeitlich versetzt angeordnet, um die erzeugten Zeichenmuster zufälliger und mit minimaler Eigenkorrelation erscheinen zu lassen. Anders ausgedrückt: diese Stufe verschiebt die Bits und multipliziert sie mit Hilfe einer XOR-Verknüpfung mit vordefinierten Verwürfelungs-Vektoren. Dadurch wird das resultierende Muster deutlich verstärkt, die Leistung des weissen, unkorrelierten Rauschens aber nicht, was für die Synchronisation eine großer Hilfe bedeutet.

Als **Beispiel** wird eine Datenfolge von fünf Zeichen (2, 4, 3, 6 u. 12) als 4-Bit-Binärdaten übertragen werden. Jedes Zeichen wird in den 1aus8-Kode umgesetzt und über eine **sequenzielle** Walsh-Hadamard-Matrize transformiert. Wir erhalten einen aus fünf 8-Bit-Vektoren bestehenden Block. Bei der anschlies-



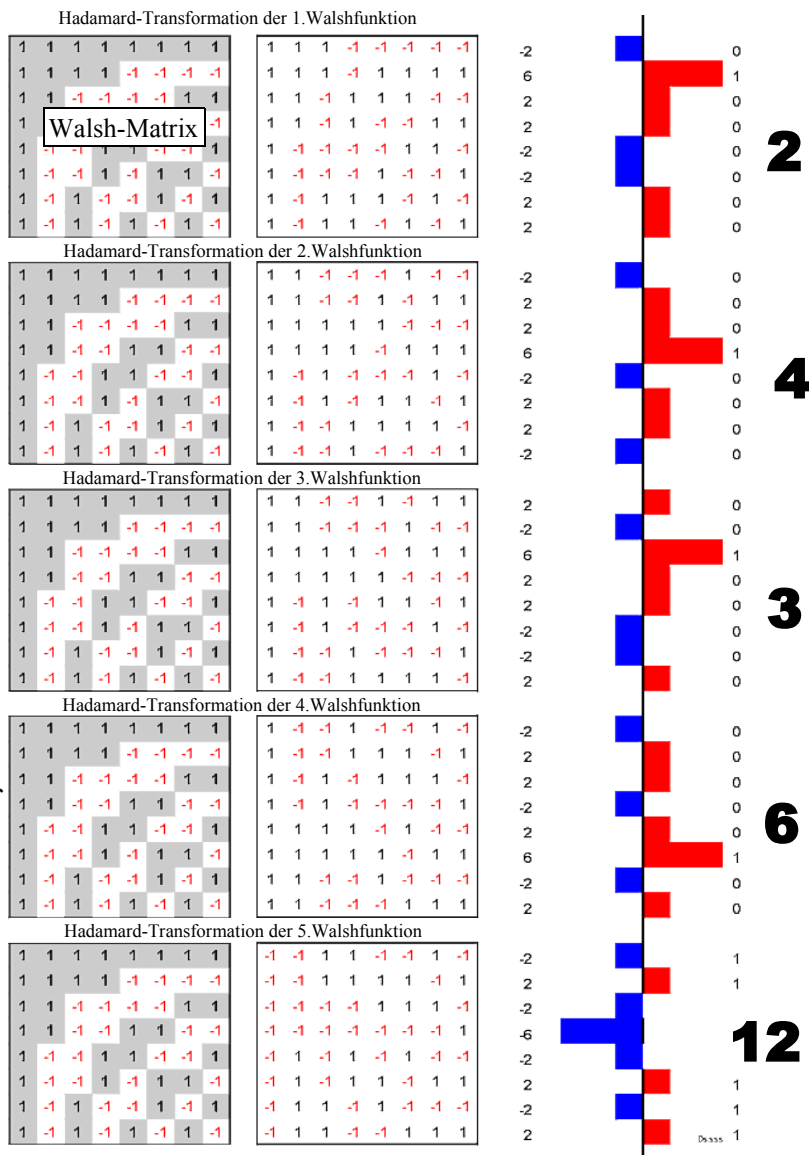
Frequenz der gesendeten Töne			
Puls	Daten	Kanal	Frequenz
0	01100	6	688 Hz
1	00110	12	675 Hz
2	00101	20	1125 Hz
3	01101	22	1188 Hz
4	11010	11	844 Hz
5	10000	1	531 Hz
6	10011	25	1281 Hz
7	11011	27	1344 Hz

Frequenz der empfangenen Töne			
Puls	Daten	Kanal	Frequenz
0	01100	6	688 Hz
1	00110	12	675 Hz
2	00101	20	1125 Hz
3	01101	22	1188 Hz
4	11010	11	844 Hz
5	10000	1	531 Hz
6	10101	21	1281 Hz
7	00010	8	1344 Hz

senden Bit-Verzahnung werden die Symbole um jeweils eine Stelle nach rechts verschoben und als 5-Bit-Daten dem MFSK-Modulator zugewiesen und ausgesendet. Jeder Ton stellt also ein Symbol dar, das 5 Bit der Information trägt, 64 Symbole bilden einen Block. Innerhalb jedes Blockes wird ein Bit pro Symbol genommen und bildet einen 64-Bit-Vektor, der als eine Walsh-Funktion kodiert wird. Jeder 64-Bit-Vektor entspricht einem 7-Bit-Zeichen des ASCII-Kodes, damit enthält jeder Block 5 Zeichen.

Der **Demodulator** misst die Amplituden aller 32 möglichen Töne (Fourier-Transformation) und da nur einer dieser 32 Kanäle einen gesendeten Ton enthalten kann, wird der mit der höchsten Amplitude aus dem Spektrum geholt. Bei der Dekodierung geschieht das gleiche in umgekehrter Reihenfolge.

Angenommen, die Kanäle 3 und 4 wurden auf dem Übertragungsweg gestört. Nach erfolgter Rückverzahnung erhalten wir eine entsprechend fehlerhafte Matrix. Für jedes der fünf Symbole werden durch inverse Walsh-Hadamard-Transformation die Walsh-Funktionen gebildet und deren Quersumme errechnet. Auch hier wird dem Kanal mit der grössten Leistung die 'logische Eins' und allen anderen eine 'logische Null' zugewiesen. Die Übertragungsfehler wurden so wieder korrigiert.



- [1] **MT63:** „<http://de.wikipedia.org/wiki/MT63>“
- [2] **OLIVIA:** „<http://www.darc.de/p31/Olivia.pdf>“
- [3] **FEC:** „<http://www.darc.de/p31/seminare/FEC.PDF>“
- [4] **Walsh-Funktion:** „<http://de.wikipedia.org/wiki/Walsh-Funktion.htm>“
- [5] **Walsh-Funktion:** „<http://mathworld.wolfram.com/WalshFunction.html>“
- [6] **Hadamard-Matrix:** „<http://mathworld.wolfram.com/HadamardMatrix.html>“
- [7] **Hadamard-Transformation:** „http://en.wikipedia.org/wiki/Hadamard_transform“
- [8] **Gray Code :** „<http://mathworld.wolfram.com/GrayCode.html>“
- [9] **Forward Error-Correcting coding with Hadamard Transform:**
„http://homepage.sunrise.ch/mysunrise/jalocha/fht_coding.htm“
- [10] **64-Bit-Matrix:** Beispiel als „OpenOffice.org Calc“-Dokument mit allen Berechnungen auf Anfrage unter (dl2rr@darc.de) abrufbar.